# STUDI TENTANG PETA KENDALI *p* TENTANG KUALITAS YANG DISTANDARISASI UNTUK PROSES PENDEK

DINAMIKA
TEKNIK
Vol. II, No. 1
Januari 2008
66 - 79

*Narwati*
*Dosen Fakultas Teknik Universitas Stikubank Semarang*

***Abstract***

*Attribute control charts especially p charts have been used widely for statistical process of atribute characteristics. In many applications, however it is neither possible nor practical to obtain sufficient subgroups to estimate accurately the control limits for the conventional p chart. This may occur when the production process is characterized as being a short run. One short run situation is a production run which produces items in a short period of time. In this article we describe the standardized p chart that the beyond control limit probabilities of proposed chart.*

**Keywords : p chart, Binomial Distribution, Normal Distribution**

## A. PENDAHULUAN

Kecacatan produk yang muncul dalam manufaktur kebanyakan merupakan kecacatan yang bersifat atribut. Oleh sebab itu peta kendali atribut, khususnya peta kendali *p* telah banyak digunakan dalam pengendalian proses statistis (*Statistical Process Control / SPC*).

Peta kendali *p* konvensional membutuhkan 20 sampai 30 subgrup. Jika jumlah ini tak terpenuhi, maka peta kendali *p* yang dibuat akan merupakan peta kendali yang tak akurat. Padahal dalam penerapannya seringkali persyaratan jumlah sampel itu tak mungkin untuk dikumpulkan dalam satu *production run*. Keadaan seperti ini biasanya terjadi pada proses produksi yang merupakan proses pendek (*short run*). Proses produksi pendek adalahproses produksi yang memproduksi produk dalam jangka waktu yang pendek atau singkat, sehingga tak cukup waktu untuk mengambil sampel dalam jumlah yang dibutuhkan.

Untuk mengatasi situasi ini Lai K. Chan menawarkan suatu metode baru peta kendali *p* yang lebih sesuai untuk proses produksi pendek[1]. Pada proses pendek, jumlah[1] data terlalu sedikit untuk dianalisa. Karena itu untuk membuat sebuah peta kendali *p*, data diambil dari beberapa *production run* yang umumnya memiliki *p* yang berlainan antara *production run*. Nilai *p* yang berlainan ini menghasilkan batas kendali dan garis tengahyang berbeda-beda. Jadi peta kendali *p* ini harus distandarisasi.

## B. MODEL DISTRIBUSI PROBABILITAS UNTUK PENGENDALIAN KUALITAS

Untuk lebih memahami proses pengendalian kualitas, maka sebelumnya penting untukdipelajari model-model distribusi dari probabilitas cacat dalam suatu sampel.

### 1 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial digunakan jika ukuran lot relatif besar dibandingkan dengan ukuran sampelnya. Distribusi ini dibentuk oleh *n* kejadian independen yang berurutan, dimana keluaran dari tiap kejadian tersebut adalah sukses atau gagal. Kejadian ini disebutsebagai *Bernoulli Trials*. Jika probabilitas kesuksesan *p* pada tiap kejadian konstan, maka probabilitas dari *d* kejadian sukses dari *n* percobaan yang dilakukan adalah:

$$P\ (d) = \binom{n}{d}\ p^{d}\,(1\text{-}p)^{n\text{-}d} \qquad d= 0,1,\ldots,n \tag{1}$$

Fungsi probabilitas ini akan membentuk distribusi Binomial. Parameter dari distribusi ini adalah *n* dan *p*. Nilai *p* berada dalam *range* $0 < p < 1$, dan *n* merupakan bilangan bulat. Rata-rata (*mean*) dari distribusi Binomial dapat diperoleh dengan :

$$E(D) = np \tag{2}$$

dan varians dapat diperoleh dengan:

---

[1] Lai K Chan "Standardized p Control Chart for Short Ruus ", International Journal of Quality and Reliability Management, Vol 13 No.6 1996 pp.88-95.

$$\mathrm{Var}(D) = np(1-p) \tag{3}$$

Dalam pengendalian kualitas statistis, seringkali muncul variabel acak $p$, yang merupakan rasio antara jumlah cacat dengan jumlah sampel dan sering disebut dengan fraksi defektif.

$$\mathrm{P} = \frac{d}{n} \tag{4}$$

dimana :

p = proporsi produk cacat

d = jumlah produk cacat /jumlah defektif

n = ukuran sample

Distribusi probabilitas $p$ dapat diperoleh dari distribusi Binomial, yaitu:

$$\mathrm{P}(\mathrm{p} \le a) = P\left(\frac{X}{n} \le a\right) = P(X \le na) \tag{5}$$

Rata-rata dari variabel acak $p$ adalah $p$ dan variansnya didapat dengan

$$\mathrm{Var}(\mathrm{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \tag{6}$$

Distribusi Binomial merupakan distribusi yang diskret.

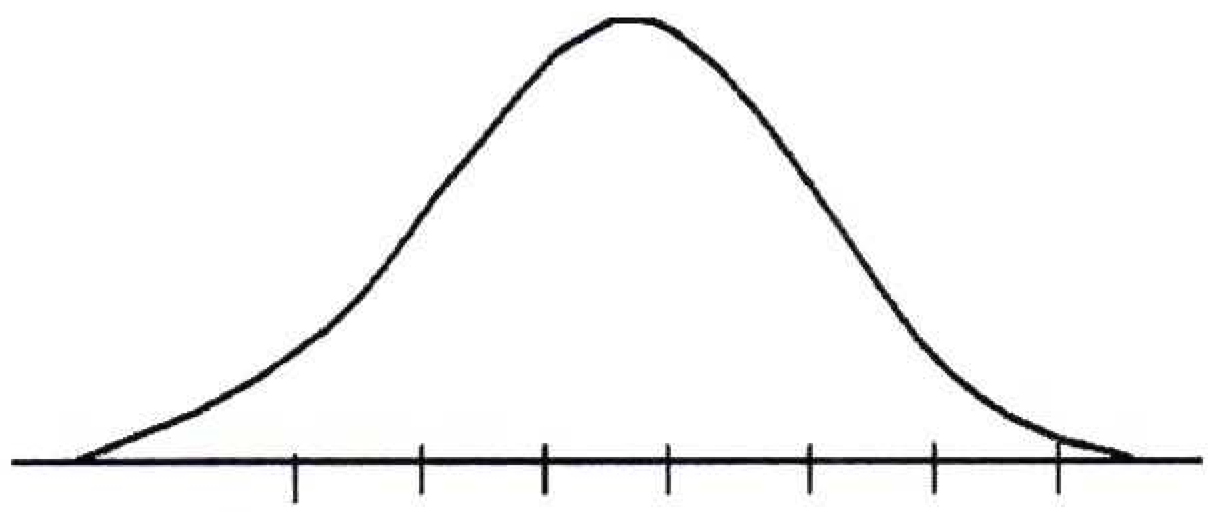
## 2 Distribusi Normal

Berbeda dengan distribusi Binomial, distribusi Normal merupakan distribusi yang kontinyu. Pengukuran yang bervariasi di sekitar nilai tengah akan membentuk distribusi Normal. Distribusi Normal memiliki dua parameter, yaitu rata-rata / *mean* ($\mu$ ) dan varians ($\sigma^2$ ). Fungsi kepadatan (*density function*) diperoleh dengan:

$$\mathrm{F(X)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e\ p\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right], -\infty < \ < \infty \tag{7}$$

dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$.

Notasi untuk menyatakan distribusi ini adalah $N(\mu, \sigma^2)$. Dibawah ini adalah bentuk dari distribusi Normal.




**Gambar 1. Gambar Distr ibusi Normal**

Standar deviasi dari distribusi Normal adalah

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma \tag{8}$$

Perhatikan dalam gambar:

- 68.26% dari keseluruhan distribusi berada dalam $\mu \pm \sigma$
- 95.44% dari keseluruhan distribusi berada dalam $\mu \pm 2\sigma$
- 99.73% dari keseluruhan distribusi berada dalam $\mu \pm 3\sigma$

Fungsi distribusi kumulatif ( *cumulative distribution function/ cdf* ) diperoleh dengan:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]dt \tag{9}$$

Distribusi Normal dapat distandarisasi dengan merubah standar deviasi ($\sigma$) sehinggamemiliki nilai satu. Dan $X$ menjadi $Z$, dengan :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{10}$$

Probabilitas didapatkan cacat kurang atau sama dengan a, adalah:

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (11)$$

$\Phi$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal yang distandarisasi.

## C. PENDEKATAN DISTRIBUSI BINOMIAL DENGAN DISTRIBUSI NORMAL

Dalam melakukan proses pengendalian kualitas, penting untuk melakukan pendekatan suatu distribusi probabilitas dengan distribusi probabilitas yang lain. Proses pendekatan akan berguna pada saat nilai tabel dari suatu distribusi tak ada. Dengan pendekatan distribusi yang lain akan didapatkan nilainya dengan tabel. Selain itu pendekatan distribusi dilakukan jika penggunaan distribusi aslinya tidak praktis.

Karena distribusi Binomial merupakan distribusi yang diskrit, dan distribusi Normal merupakan distribusi yang kontinu, maka perlu ditambahkan faktor koreksi kontinuitas (*continuity correction*), yaitu sebesar 0.5.

Jika $n$ bernilai besar, maka pendekatan distribusi Binomial dengan distribusi Normal dapat dilakukan dengan

$$\mu = np \qquad (12)$$

dan

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad (13)$$

Distribusi Binomial yang telah distandarisasi diasumsikan memiliki distribusi normal. Karena itu probabilitas yang keluar dari BKA maupun dari BKB seharusnya mendekati $\alpha/2$. Misalnya jika digunakan $\alpha = 0.0027$, maka probabilitas yang keluar dari BKAmaupun BKB seharusnya mendekati $0.0027/2 = 0.00135$.

## D. PETA KENDALI *p* (*p-CHART*)

Peta kendali merupakan salah satu alat (*tool*) untuk melakukan pengendalian proses statistis (*SPC*). Peta kendali atau *control chart* digunakan untuk menganalisa output darisuatu proses. Data yang merupakan kecacatan dari output diplotkan pada peta kendali:. Jika tidak ada data yang keluar dari batas kendali atas (BKA) ataupun batas kendali bawah (BKB), serta plot data tidak menunjukkan gejala-gejala penyimpangan, maka dapat dikatakan proses telah terkendali. Sebaliknya jika ada data yang keluar dari batasbatas kendali, maka proses tersebut belum stabil. Data yang keluar dari batas kendali tersebut disebabkan karena adanya penyebab khusus (*special cause*).

Tujuan utama pembuatan peta kendali adalah untuk mendeteksi adanya penyebabkhusus dengan cepat, sehingga dapat segera diambil tindakan perbaikan terhadap sumber dari penyebab khusus tersebut.

Selain itu dengan membuat peta kendali dapat diketahui kecakapan proses (*process capability*). Menurut data yang diplotkan, ada dua macam peta kendali, yaitu:

1. Peta Kendali Variabel

   Data yang diplotkan adalah data variabel, yaitu data yang memiliki ukuran, misalnya berat, panjang, waktu, panas, dan lain-lain.

   Yang merupakan peta kendali variabel adalah *R-chart*, *X -chart*, dan *S-chart*.

2. Peta Kendali Atribut

   Data yang diplot pada peta kendali ini adalah data atribut, yaitu data yang hanya memiliki dua karakteristik, memenuhi atau tak memenuhi (*go or no go*) spesifikasinya. Sebenarnya data yang bersifat variabel dapat diubah menjadi data yang bersifat atribut dengan menetapkan suatu batasan yang memisahkan antara produkyang sesuai dengan produk yang tidak sesuai. Data yang berupa atribut dapat diperoleh lebih cepat daripada data variabel.

   Ada empat macam peta kendali data atribut, yaitu:

   a. Peta kendali fraksi defektif (*p-chart*)

   b. Peta kendali jumlah defektif (*np-chart*)

   c. Peta kendali jumlah cacat (*c-chart*)

   d. Peta kendali cacat per unit (*u-chart*)

   Selanjutnya peta kendali *p* ini akan dibahas lebih mendalam.

### 1 Peta Kendali *p*

Digunakan untuk pengambilan sampel dengan ukuran sampel *(n)* tetap.

* $\bar{p} = \dfrac{\sum d_k}{nk}$ (14)

* BKA = $\bar{p} + 3\sqrt{\dfrac{[\bar{p}(1-\bar{p})]}{n}}$ (15)

* BT = $\bar{p}$ (16)

* BKB = $\bar{p} - 3\sqrt{\dfrac{[\bar{p}(1-\bar{p})]}{n}}$ (17)

* $\mu = \bar{p}$ (18)

* $\sigma = \sqrt{\dfrac{[\bar{p}(1-\bar{p})]}{n}}$ (19)

dimana :

$\mu$ = Nilai Rata-rata *(Mean)*

$\sigma$ = Standar Deviasi

$p$ = Taksiran Proporsi cacat

Jika ukuran sampel ($n$) berubah-ubah, maka dapat kita gunakan :

$nk : n_1, n_2, n_3, \ldots$

$dk : d_1, d_2, d_3, \ldots,$

* $\bar{p} = \dfrac{\sum d_k}{n_k}$ (20)

* $\text{BKA}_k = \bar{p} + 3\sqrt{\dfrac{[\bar{p}(1-\bar{p})]}{n_k}}$ (21)

* BT = $\bar{p}$ (22)

$$* \quad \text{BKB} = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{[\bar{p}(1-\bar{p})]}{n_k}} \tag{23}$$

Untuk membuat suatu peta kendali, harus dilakukan penentuan batas kendalinya. Penentuan batas kendali mengikuti model

$$\text{BKA} = E(X) + \text{k}\sqrt{\text{Var}(X)} \tag{24}$$

$$\text{BK} = E(X) \tag{25}$$

$$\text{BKB} = E(X) - \text{k}\sqrt{\text{Var}(X)} \tag{26}$$

dimana $E(X)$ merupakan rerata dari data dan $\sqrt{\text{Var}(X)}$ adalah simpangan baku. Nilai $k$ ditentukan berdasarkan $\alpha$. Besar kecilnya nilai $\alpha$ ditentukan oleh keadaan *production run* dan kebutuhan. Namun pada umumnya nilai $k$ yang sering digunakan adalah 3 ($\alpha = 0.00135$).

## 2 Peta Kendali *p* yang Distandarisasi (konvensional)

Standarisasi peta kendali $p$ digunakan untuk mempermudah interpretasi dari peta itu. Standarisasi terutama digunakan pada ukuran sampel yang bervariasi untuk mendapatkan peta kendali dengan batas kendali yang konstan. Standarisasi dilakukan dengan menggunakan rumus:

$$\text{Zk} = \frac{((p_k - p)}{\sigma_k} = \frac{(p_k - p)}{\sqrt{(\bar{p}(1-p))/n_k}} = \frac{\sqrt{n_k}\,(p_k - p)}{\sqrt{(p(1-p)}} \tag{27}$$

Untuk melakukan standarisasi, harus dihitung simpangan baku untuk tiap-tiap sampel ($\sigma k$ ). Karena tiap sampel memiliki jumlah yang tak sama ($nk$), maka simpangan baku untuk tiap sampel juga akan berbeda.

$$\sigma_k \quad \sqrt{\frac{(\text{p}(\ 1-\text{p}\ ))}{\text{n}_\text{k}}} \tag{28}$$

### 3 Peta Kendali *p* yang distandarisasi untuk proses pendek

Dalam proses yang dilakukan dalam proses pendek akan sulit untuk memperoleh jumlah sampel yang mencukupi untuk membuat peta kendali dengan cara konvensional. Untuk mengatasi masalah ini, maka Lai K. Chan memberikan suatu metode baru untuk mendapatkan *Z* yang lebih tepat[2], yaitu :

$$Z_k^* = \frac{\sqrt{n}\left(p_k - p - (C/n)\right)}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{29}$$

k = 1, 2, 3,........

Rumus ini dapat diturunkan untuk mendapatkan faktor koreksinya, yaitu :

$$Z_k^* = \frac{\sqrt{n}\left(p_k - p - (C/n)\right)}{\sqrt{p(1-p)}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}(p_k - p) - \frac{C}{\sqrt{n}}}{\sqrt{p(1-p)}}$$

Jadi factor koreksinya adalah

$$= \frac{C}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{C}{n\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{C}{n\sigma} \tag{30}$$

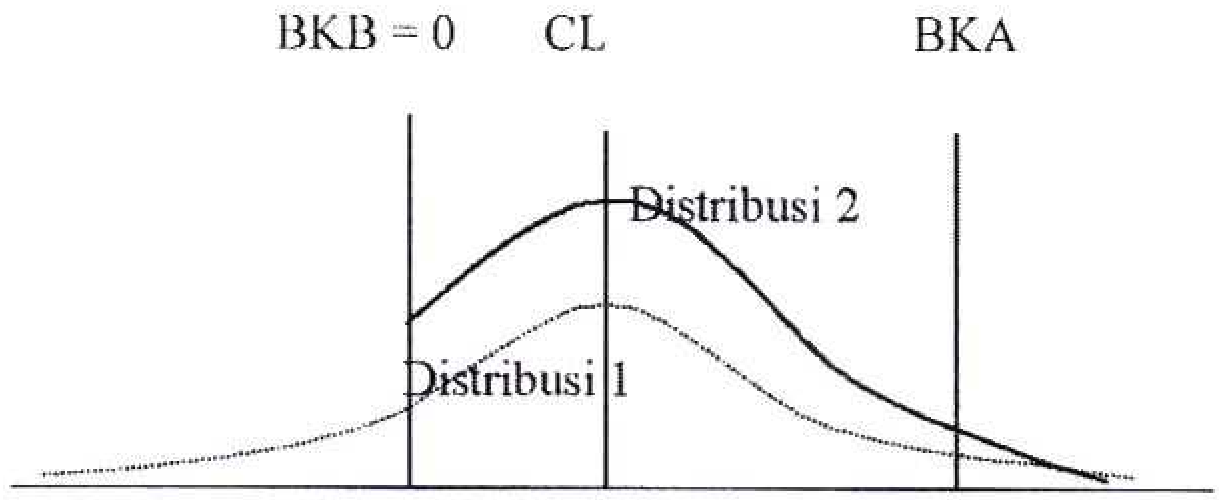
Rumus standarisasi di atas digunakan untuk probabilitas cacat ($p$) diketahui, dan pengambilan sampel dilakukan dengan ukuran yang sama

## E. ANALISA

1. Hasil simulasi menunjukkan pada $n$ yang kecil, prosentase data yang keluar dari BKA bernilai besar. Hal ini disebabkan karena pada $n$ yang kecil, distribusi akan terdesak oleh BKB yang sama dengan nol. Distribusi yang terdesak ini membuat

[2] Lai K Chan "Standardized p Control Chart for Short Ruus ", International Journal of Quality and Reliability Management, Vol 13 No.6 1996 pp.88-95.

data yang keluar dari BKA bernilai besar.




**Gambar 2. Distribusi yang Terdesak oleh BKB = 0**

Jika diperhatikan gambar di atas, maka jika distribusi 1 terdesak oleh BKB= 0, maka akan menjadi distribusi 2. Pada distribusi 2, prosentase data di atas BKA lebih besar dibandingkan pada distribusi 1. Terdesaknya BKB karena $n$ kecil ini disebabkan karena 2 alasan:

- $Z_k = \dfrac{\sqrt{n_k}\,(p_k - \overline{p})}{\sqrt{(\overline{p}(1-\overline{p})}}$

Jika nilai $n$ makin kecil, maka nilai $Zk$ akan makin kecil juga, dan itu berartidistribusinya juga akan semakin bergeser ke kiri mendekati, bahkan mengenai nol.

- BKB $= \overline{p} - 3\sqrt{\dfrac{(\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

Jika nilai $n$ makin kecil, maka BKB akan semakin mendekati nilai nol, dan bahkan dapat bernilai negatif. Jika BKB bernilai negatif (BKB < 0), maka dianggap BKB = 0

2. Semakin besar nilia $n$, maka prosentase data akan makin kecil mendekati $\alpha/2$-nya (0.00135) sampai pada $n$ minimum yang menyebabkan BKB $\geq 0$, kemudian

prosentase data akan bergerak konstan disekitar $\alpha/2$-nya (0.00135). Yang dimaksud dengan nilai $n$ minimum di atas adalah $n$ pada saat BKB = 0. BKB = 0

$$\bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0$$

$$\bar{p} = 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\bar{p}^2 = 9\frac{(\bar{p}(1-p)}{n}$$

$$n = 9\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{p^2}$$

$$n = 9\frac{(1-\bar{p})}{\bar{p}}$$

Jika nilai $n$ bernilai lebih besar dari $n$ minimumnya, maka distribusi akan berbentuk distribusi Normal, karena distribusi tersebut tak terdesak oleh BKB = 0.

3. Pada saat distribusi masih terdesak oleh BKB = 0 ($n$-nya bernilai lebih besar daripada $n$ minimal.), maka akan terlihat :
   1) Data dengan faktor koreksi memiliki prosentase data keluar dari BKA yang lebih

      mendekati nilai $\alpha/2$ (0.00135) dibandingkan dengan pada data tanpa faktor koreksi.
   2) Prosentase data di bawah BKB untuk standarisasi tanpa dan dengan faktor koreksi sama-sama bernilai nol.
4. Pada saat distribusi telah berbentuk normal (tak terdesak oleh BKB = 0), akan tampak:
   - Prosentase data di atas BKA memiliki nilai yang lebih mendekati $\alpha/2$ (0.00135) pada rumus standarisasi dengan faktor koreksi dibandingkan dengan rumusstandarisasi tanpa faktor koreksi, kecuali pada $p = 0.5$.
   - Prosentase data di bawah BKB memiliki nilai yang lebih mendekati $\alpha/2$-nya

(0.00135) pada rumus standarisasi tanpa faktor koreksi dibandingkan dengan rumus standarisasi dengan faktor koreksi. Sebenarnya gejala di atas muncul karena pada saat BKB > 0, distribusi masih mungkin terdesak oleh garis nol.

5. Pada $p = 0.5$ tampak baik prosentase data di atas BKA maupun di bawah BKB lebih mendekati nilai $\alpha/2$ (0.00135), ini karena nilai $p$ (0.5) memiliki arti yang cukup besar untuk membuat distribusi jauh dari garis nol. Hal itu membuat distribusi tak terdesak oleh garis nol, sehingga akhirnya prosentase data di atas BKA mendekati nilai $\alpha/2$ (0.00135).
6. Selisih prosentase data diluar batas kendali antara distribusi dengan faktor koreksi dandistribusi tanpa faktor koreksi timbul karena adanya faktor koreksi. Jika tak ada faktor koreksi maka tak akan ada selisih. Karena itu selisih prosentase identik dengan faktor koreksi. Dari gambar plot data selisih prosentase data di atas BKA akan tampak :
   - makin besar nilai $n$, maka nilai selisih prosentase data diatas BKA makin kecil
   - makin besar nilai $p$, maka nilai selisih prosentase data diatas BKA makin kecil

   Keadaaan di atas sesuai dengan teori bahwa nilai faktor koreksi berbanding terbalik dengan nilai $n$ dan $p$.

   $$\text{Faktor koreksi} = \frac{C}{n\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

   Dalam simulasi ini dipakai konstanta ($C$) = 1.2.

   Hasil simulasi menunjukkan pada $p$ kecil ($p = 0.005$ dan pada $p = 0.01$) dan $n$ kecil ($n = 5$; $n = 10$; $n = 25$), tampak prosentase data di bawah BKB pada peta kendali tanpa faktor koreksi = 0, namun ketika diboboti dengan faktor koreksi, nilai prosentase di bawah faktor koreksi menjadi amat besar nilainya (sekitar 90%).

7. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada $p$ tertentu terdapat beberapa pasang konstanta faktor koreksi yang menghasilkan prosentase data diluar BKA yang sama nilainya untuk masing-masing $n$. Konstanta faktor koreksi yang memiliki nilai prosentase data di atas BKA yang sama, antara lain :
   - Pada nilai $p$ sebesar 0.005, dengan konstanta faktor koreksi 1.1 dan 1.2.
   - Pada nilai $p$ sebesar 0.05, dengan konstanta faktor koreksi 0.9 dan 1.1
   - Pada nilai $p$ sebesar 0.1, dengan konstanta faktor koreksi 1.6 dan 1.8
   - Pada nilai $p$ sebesar 0.5, dengan konstanta faktor koreksi 1.1 dan 1.2.

13. Faktor koreksi yang paling sesuai tergantung $p$-nya. Berdasarkan simulasi 2, faktor koreksi yang paling sesuai untuk masing-masing $p$, adalah:
   - $p$ sebesar 0.005, faktor koreksi yang paling sesuai adalah 1.2
   - $p$ sebesar 0.01,.faktor koreksi yang paling sesuai adalah 1.2
   - $p$ sebesar 0.05, faktor koreksi yang paling sesuai adalah 1.1
   - $p$ sebesar 0.1, faktor koreksi yang paling sesuai adalah 1.1
   - $p$ sebesar 0.2, faktor koreksi yang paling sesuai adalah 0.7
   - $p$ sebesar 0.5, faktor koreksi yang paling sesuai adalah 0.7

   Karena proporsi cacat yang terjadi dalam suatu proses produksi umumnya kurang dari 10% atau $p \leq 0.1$, maka dapat disimpulkan secara umum lebih baik dipakai faktor koreksi sebesar 1.1.

## F. KESIMPULAN

Dari hasil analisa dapat disimpulkan

1. Nilai $n$ dan $p$ akan menentukan terdesak atau tidaknya suatu distribusi cacat oleh BKB = 0. Jika nilai $n$ dan $p$ semakin kecil, maka distribusinya akan makin terdesak oleh BKB = 0.
2. Terdesaknya suatu distribusi oleh BKB = 0 akan menyebabkan prosentase yang keluar dari BKA jauh lebih besar dari nilai $\alpha/2$ (0.00135). Karena itu untuk distribusi yang terdesak, rumus standarisasinya perlu dikurangi oleh suatu faktor koreksi.

3. Jika distribusi telah berbentuk distribusi normal (distribusi tak terdesak garis nol), akan diperoleh hasil yang lebih baik jika menggunakan rumus standarisasi tanpa faktor koreksi.
4. Nilai konstanta faktor koreksi terbaik dipengaruhi oleh nilai $p$. Semakin besar nilai $p$, maka semakin kecil nilai konstanta faktor koreksi yang paling sesuai untuk $p$ tersebut.

## G. DAFTAR PUSTAKA


- Boediono, Wayan Koster, (2001), *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*, PT Remaja Rosdakarya, Bandung.
- Lai, K. Chan., (1996), *Standardized p control charts for Short Runs*, International Journal of Quality and Reliability Management, Vol. 13 No.6, 88-95
- Levinson, William A. and Tubelty, frank., (1997), *Statistical Process Control Essential and Productivity Improvement*, ASQC Quality Press.
- Montgomery, Douglas C., (1996), *Introduction to Statistical Quality Control*, Third Edition, USA: John Wiley and Sons, Inc..
- Tanti Octavia, (2006), *Jurnal Teknik Industri Fakultas Teknologi Industri Universitas Kristen Petra*, Vol.8 No.1, 53-64.